PROBLEME

I-1/ Soit h la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $h(x) = x - Logx$.

a- Etudier les varations de h.

b- En déduire que pour tout x de $]0,+\infty[$ on a: $h(x) \geq 1$.

2/ Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par:

$f(0) = 0$ et $f(x) = \dfrac{1}{x - Logx}$ si $x > 0$.

a- Montrer que f est continue sur $[0;+\infty[$.

b- La fonction f est-elle dérivable à droite en 0 ?

II- Soit la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $F(x) = \int_x^{2x} f(t)dt$.

1/a- Montrer que F est dérivable sur $[0;+\infty[$.

b- Montrer que pour tout x de $]0;+\infty[$, $F'(x) = \dfrac{Log2 - Logx}{h(2x)h(x)}$

et que $F'(0) = 0$.

2/ Montrer que pour tout x de $]0;+\infty[$, $\int_x^{2x} \frac{1}{t}dt = Log2$.

3/ Montrer que pour tout x de $[1;+\infty[$; $0 \leq F(x) - Log2 \leq \dfrac{Log2x}{x - Logx}$

En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

4/a- Montrer que $F\left(\frac{1}{2}\right) \leq Log2$.

b- Montrer alors qu'il existe un réel α de $\left[\frac{1}{2};1\right]$ tel que $F(\alpha) = Log2$.

5/a- Dresser le tableau de variations de F.

b- Donner l'allure de la courbe représentative de F dans un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (on donne $F(1) \simeq 0,9$ et $F(2) \simeq 1,1$)

III- Dans toute cette partie, n désigne un entier naturel non nul.

1/ Soit la suite (v_n) définie sur IN* par : $v_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \dfrac{t}{t - Logt}dt$.

a- Montrer que pour tout t de $]0,+\infty[$; $\dfrac{t}{t - Logt} \leq t$.

b- Montrer que la suite (v_n) est croissante .

c- En déduire que la suite (v_n) converge et que $0 \leq \lim\limits_{n\to+\infty} v_n \leq \frac{1}{2}$.

2/ Soit la suite (w_n) définie sur IN* par : $w_n = \int_1^n \dfrac{t}{t - Logt}dt$.

a- Montrer que pour tout t de $[1;+\infty[$; $\dfrac{t}{t - Logt} \leq 1 + Logt$.

En déduire que pour tout n de IN*; $w_n \leq nLogn$.